Projeto de Pesquisa para Bolsa de Iniciação Científica

Algoritmos e Heurísticas para Empacotamento Tridimensional

ALUNO: Pedro Henrique Del Bianco Hokama*
ORIENTADOR: Flávio K. Miyazawa†

Instituto de Computação - UNICAMP

Resumo

Neste projeto iremos investigar algoritmos para empacotamento tridimensional. O problema consiste em, dados um conjunto de contêineres (recipientes) iguais, empacotar um dado conjunto de caixas dentro do menor número de contêineres possível. O empacotamento obtido deve ser ortogonal, mas não necessariamente orientado. Nenhuma caixa deve se sobrepor a outra e nem ultrapassar os limites do contêiner onde foi empacotado. Toda caixa deve ser empacotada em um contêiner. Nosso objetivo será estudar sua complexidade computacional, algumas técnicas envolvidas no problema e implementar alguns algoritmos e heurísticas para estes problemas.

Palavras Chave: Empacotamento Tridimensional, Algoritmos de Aproximação, Heurísticas, Otimização Combinatória.

1 Introdução

Neste projeto iremos investigar algoritmos para problemas de empacotamento tridimensional. A importância do estudo de problemas de empacotamento é justificada por um grande número de aplicações diretas nos setores de indústria e de serviços, já que quase sempre há a necessidade de otimizar os processos de logística. A logística é responsável por uma fatia grande dos custos que são embutidos nos preços dos produtos e, portanto, soluções melhores para empacotamento significam custos e preços mais baixos e mais competitivos. Além dos processos de logística, há ainda situações em que os problemas de corte têm aplicação direta, como nos setores têxtil e de metalurgia. Assim, é necessário, portanto, prover soluções

*Beneficiário.
†Responsável pelo projeto. Email: `fkm@ic.unicamp.br`

de qualidade, tão próximas da otimalidade quanto possível e com desempenho suficiente para que as soluções sejam alcançadas em limites aceitáveis de tempo e recursos computacionais.

O problema de empacotamento tridimensional, 3BP, pode ser colocado como o problema de se empacotar um conjunto de caixas no menor número de contêineres possível. Esta versão tem sido menos investigado que suas versões uni- e bidimensional. Porém, é um problema onde há grande atividade de pesquisa nos últimos anos.

Quando consideramos os problemas de empacotamento, iremos trabalhar no espaço euclideano $\mathbb{R}^3$, com o sistema de coordenadas xyz. Para o problema de empacotamento uni- e bidimensional, usaremos apenas uma ou duas das dimensões, respectivamente.

Um item e a ser empacotado tem suas dimensões definidas por $x(e)$, $y(e)$ e $z(e)$, onde cada uma dessas dimensões é a medida no correspondente eixo do sistema xyz. Para os casos uni- e bidimensional alguns destes valores não estarão definidos. No caso dos recipientes, suas dimensões são especificadas analogamente. Quando o recipiente é uni-, bi- ou tridimensional, este é referido como uma *barra*, *placa* ou contêiner, respectivamente.

Sempre que considerarmos o empacotamento de itens em recipientes, iremos considerar empacotamentos ortogonais (i.e., as arestas dos itens são paralelos ou perpendiculares aos dos recipientes) onde os itens não se sobrepõem nem ultrapassam os limites dos recipientes em que foram empacotados.

2 Problema de Empacotamento Tridimensional

O problema de empacotamento tridimensional pode ser definido da seguinte forma:

Problema de Empacotamento Tridimensional (3BP): *São dados:* (i) *contêineres com dimensões* $B = (B_x, B_y, B_z)$*,* (ii) *uma lista de caixas* $L = (b_1, \ldots, b_n)$*, onde cada caixa* b_i *tem dimensões* (x_i, y_i, z_i)*. O objetivo é encontrar um empacotamento das caixas de* L *dentro do menor número de contêineres.*

Denotaremos as versões uni- e bidimensional do problema 3BP por 1BP (Problema de Empacotamento Unidimensional) e por 2BP (Problema de Empacotamento em Placas), respectivamente.

Um outro problema relacionado e que usaremos como subrotina dentro das estratégias para a resolução do problema 3BP é o problema da mochila tridimensional, definido a seguir:

Problema da Mochila Tridimensional (3DK): *São dados:* (i) *uma lista de caixas* $L = (b_1, \ldots, b_n)$*, onde cada caixa* b_i *tem dimensões* (x_i, y_i, z_i) *e valor* v_i *e* (ii) *um contêiner de dimensões* $B = (B_x, B_y, B_z)$*. O* *objetivo é encontrar* (a) *um subconjunto* $Q \subseteq L$ *e* (b) *um empacotamento das caixas de* Q *em um contêiner* B *tal que* (c) *a soma dos valores das caixas em* Q *é maximizado.*

Denotaremos as versões uni- e bidimensional do problema 3DK por 1DK e 2DK, respectivamente. O Problema da Mochila (1DK) é um dos problemas mais investigados na literatura. Sua formulação é extremamente simples e encontra aplicações em diversos subproblemas de otimização.

Para obter algoritmos com bom desempenho prático, é necessário sobretudo se ter algoritmos/heurísticas rápidas e que de preferência apresentem alguma garantia quanto a qualidade da solução produzida. Além disso, como a versão tridimensional é menos estudada que a versão bidimensional, iremos considerar a adaptação de técnicas desenvolvidas no caso bidimensional para serem aplicadas ao caso tridimensional. A seguir, apresentamos uma síntese bibliográfica relacionando alguns resultados de nosso interesse.

Em [4], Cintra, Miyazawa, Wakabayashi e Xavier apresentam algoritmos baseados em programação dinâmica com bons resultados práticos para o problema 2DK. Tal estratégia obteve resultados práticos excelentes e possibilitou resolver instâncias práticas disponíveis na internet e que ainda estavam em aberto na literatura.

O algoritmo com melhor fator assintótico de aproximação (f.a.a) para o 2DP, de $1{,}691$ é devido a Caprara [2] e para o 3DP é devido a Li e Cheng [12] e Csirik e van Vliet [8], com f.a.a. $4{,}84$. Estes resultados foram apresentados para o caso onde não é possível girar os itens. As variantes que permitem rotações são bastante interessantes do ponto de vista prático, pois têm inúmeras aplicações. Porém, há bem menos resultados nesta linha. Em 1982, Chung, Garey e Johnson [3] levantaram a questão sobre a possibilidade de se obter algoritmos com melhores garantias de desempenho quando rotações são permitidas, conforme o seguinte trecho extraído desse artigo:

> "*4. Directions for further research [...] A second line of attack would be to design and analyse algorithms which could make use of the fact that, in some applications,* $90°$ *rotations of rectangles might be allowable.*
>
> *Algorithms which consider the possibility of rotations might well yield improvements. Can one prove worst case bounds that reflect these improvementes ?*"

Outros artigos também mencionam esta questão, como feito pelos pesquisadores Coffman, Garey, Johnson e Tarjan [6, 7].

Miyazawa e Wakabayashi [14] obtiveram um primeiro resultado nessa linha para o problema de empacotamento tridimensional em uma caixa (Three-dimensional Strip Packing Problem - 3SP) onde as caixas podem sofrer rotações ortogonais em torno do eixo da altura. Os autores mostram que a versão com rotações é tão difícil quanto a versão orientada e apresentam os primeiros algoritmos de aproximação com limitantes não triviais. Posteriormente, em [13], estes autores provaram que a versão com rotações é pelo menos tão difícil quanto a versão orientada e apresentam limitantes melhores para vários problemas: Para a versão com rotação dos problemas 2SP, 2BP, 3SP e 3BP, é apresentado algoritmos com f.a.a. de $1{,}61$, $2{,}64$, $2{,}76$ e $4{,}89$, respectivamente. Estes resultados respondem as questões postas em [3, 6, 7] e melhoram os resultados existentes para estas versões.

Para a versão de cubos, Miyazawa e Wakabayashi apresentaram um algoritmo com f.a.a. 2.67. Para o empacotamento de cubos d-dimensionais, Kohayakawa, Miyazawa, Raghavan e Wakabayashi [11] apresentam o primeiro algoritmo com f.a.a. que não é exponencial na dimensão. Posteriormente, Bansal, Correa, Kenyon e Sviridenko [1] apresentaram um APTAS para este mesmo problema.

Um ponto muito interessante é quando há demandas d_b para o número de itens (caixas) b a serem empacotadas. Neste caso, chamamos as versões destes problemas de Problemas de Corte de Estoque e denotamos as versões correspondentes dos problemas 1BP, 2BP e 3BP de 1CS, 2CS e 3CS, respectivamente. Naturalmente as versões iBP são casos particulares das versões iCS onde todas as demandas são iguais a 1.

Atualmente só se sabe que as complexidades computacionais dos problemas iCS estão em algum lugar dentro da classe EXPSPACE e acredita-se que as correspondentes versões de decisão destes problemas não estejam em NP-Completo (indicando que podem ser muito mais difíceis que as correspondentes versões iBP). Apesar desta aparente dificuldade computacional, Cintra, Miyazawa, Wakabayashi e Xavier [5] mostraram que algoritmos de aproximação para os problemas iBP que possuem um “bom comportamento” podem ser transformados para a versão iCS mantendo o mesmo fator de aproximação. Além disso, estes autores mostraram que praticamente todos os (melhores) algoritmos tem um bom comportamento. Para detalhes sobre a definição de algoritmos com bom comportamento, veja [5].

Gilmore e Gomory [9, 10] aplicaram um método baseado em programação linear usando geração de colunas para o problema 1CS e 2CS e alcançaram soluções com valor próximo do ótimo usando simplesmente estratégias baseadas em arredondamento da solução fracionária. Um indicativo importante da qualidade das soluções produzidas por este método pode ser apontado pela conjectura *MIRUP (Modified Integer Round UP Property)*, proposta por [17] que sugere que, para o caso do 1CS, a solução ótima é menor ou igual a solução ótima (fracionária do programa linear) arredondada para cima e somado de 1. Este resultado indica que o limitante obtido é quase igual ao do ótimo (gap de integralidade quase 1). Até o momento a conjectura permanece em aberto, sem uma prova definitiva ou um contra-exemplo, apesar de tentativas posteriores de fortalecê-la, como em [16]. A maior diferença conhecida entre as soluções de

(2) e (1) para o caso do PEU é de $\frac{7}{6} = 1{,}1666\ldots$ [15].

Para o caso 2CS, Cintra, Miyazawa, Wakabayashi e Xavier [4] realizaram alguns experimentos baseados em instâncias disponíveis na internet e obtiveram um gap de integralidade médio bem abaixo de $1{,}01$ (a maioria dos testes apresentou valor abaixo de $1{,}003$) para o caso guilhotinado. Não conhecemos resultados deste tipo para o problema 3CS.

Vamos exemplificar este método para o problema 3CS. Seja uma instância $I = (C, L, d)$ para o problema 3BP. $C = (X, Y, Z)$ é a definição das dimensões do contênier onde serão empacotadas caixas menores. As caixas menores a que nos referimos são as que estão na lista $L = (c_1, \ldots, c_n)$, considerando que cada item $c_i = (x, y, z)$ possui as dimensões (x_i, y_i, z_i). Há ainda o vetor d, que é um vetor de demandas (quantas caixas iguais a c_i deve-se empacotar). Um *padrão* de um conjunto de itens L, em um recipiente B, é um empacotamento de um subconjunto de itens de L em B. Vamos definir ainda um vetor μ_P em $\mathbb{Z}^n$, tal que o i-ésimo componente representa a quantidade de itens do tipo i empacotadas pelo padrão P.

Seja $\mathcal{P}$ o conjunto de todos os padrões possíveis e d o vetor indexado nos itens, indicando a demanda de cada item. O problema 3CS pode ser formulado como o seguinte problema de programação linear inteira:

$$\begin{array}{rrcl} \text{minimizar} & \displaystyle\sum_{P \in \mathcal{P}} x_P & & \\ \text{sujeito a} & \displaystyle\sum_{P \in \mathcal{P}} \mu_P\, x_P & \geq & d \\ & x_P & \in & \mathbb{Z}^+ \quad \forall P \in \mathcal{P}. \end{array} \tag{1}$$

A relaxação de (1) é dada por:

$$\begin{array}{rrcl} \text{minimizar} & \displaystyle\sum_{P \in \mathcal{P}} x_P & & \\ \text{sujeito a} & \displaystyle\sum_{P \in \mathcal{P}} \mu_P\, x_P & \geq & d \\ & x_P & \geq & 0 \quad \forall P \in \mathcal{P}. \end{array} \tag{2}$$

Para resolver o programa linear acima, usamos basicamente o algoritmo simplex, com a técnica de geração de colunas. Começamos com uma solução inicial (base inicial) e em cada iteração do método pivotamos trocando colunas que ainda não estão na base e podem melhorar a atual solução fracionária. A formulação é bastante flexível para a inserção de condições ou restrições existentes nos empacotamentos dos recipientes. Neste caso, basta que o conjunto $\mathcal{P}$ contemple apenas os padrões com as restrições desejadas. No caso do problema 3CS, o problema de se gerar uma coluna de (2) recai na resolução do problema 3DK.

3 Objetivos

O objetivo deste projeto é investigar o problema de empacotamento tridimensional e desenvolver algoritmos e heurísticas para o mesmo. Iremos dar ênfase nos seguintes itens:

- Dar ao aluno uma introdução ao estudo da complexidade computacional e de técnicas para tratar alguns problemas de otimização. Muitos algoritmos para os problemas a serem investigados usam a técnica de programação dinâmica, *branch & bound*, programação linear, programação inteira e heurísticas diversas.
- Investigar algoritmos/heurísticas para o problema 3DK.
- Investigar algoritmos/heurísticas para o problema de empacotamento em contêineres.
- Implementar rotinas de visualização de empacotamento bi e tridimensional.
- Testar os algoritmos implementados com instâncias geradas computacionalmente ou disponíveis na internet.

4 Métodos

Os materiais necessários para o desenvolvimento deste projeto consistem de livros, artigos científicos e computadores. Recursos estes já disponíveis no Instituto de Computação, onde este projeto será executado.

5 Cronograma e Metas Semestrais

O desenvolvimento do projeto será dividido em quatro fases:

1. Iremos estudar sobre complexidade computacional e técnicas básicas para o tratamento de problemas NP-difíceis. Esperamos dedicar 1.5 meses para esta fase.
2. Implementação de um algoritmo de visualização de empacotamentos tridimensionais. Esperamos dedicar 1 mês para esta fase.
3. Estudo, implementação e comparação de heurísticas e algoritmos para o problema 3DK. Esperamos dedicar 3.5 meses para esta fase.

4. Estudo, implementação e comparaçao de heurísticas e algoritmos para o problema 3BP. Esperamos dedicar 4 meses para esta fase.

5. Estudo, implementação e comparaçao de heurísticas e algoritmos para o problema 3BP com recipientes de diferentes tamanhos. Esperamos dedicar 2 meses para esta fase.

No primeiro semestre da iniciação científica, esperamos cumprir os itens 1–3. No segundo semestre, esperamos cumprir os itens 4–5.

Referências Bibliográficas

[1] N. Bansal, J.R. Correa, C. Kenyon, and M. Sviridenko. Bin packing in multiple dimensions: Inapproximability results and approximation schemes. *Mathematics of Operations Research*, To appear.

[2] A. Caprara. Packing 2-dimensional bins in harmony. In *Proc. of 43rd Symposium on Foundations of Computer Science*, pages 490–499, 2002.

[3] F. R. K. Chung, M. R. Garey, and D. S. Johnson. On packing two-dimensional bins. *SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods*, 3:66–76, 1982.

[4] G. Cintra, F. K. Miyazawa, Y. Wakabayashi, and E. C. Xavier. Algorithms for two-dimensional cutting stock and strip packing problems using dynamic programming. *European Journal on Operations Research*, To appear.

[5] G. F. Cintra, F. K. Miyazawa, Y. Wakabayashi, and E. C. Xavier. A note on the approximability of cutting stock problems. *European Journal on Operations Research (Elsevier Science)*, to appear.

[6] E. G. Coffman, Jr., M. R. Garey, and D. S. Johnson. Approximation algorithms for bin packing - an updated survey. In G. Ausiello, M. Lucertini, and P. Serafini, editors, *Algorithms design for computer system design*, pages 49–106. Spring-Verlag, New York, 1984.

[7] E. G. Coffman, Jr., M. R. Garey, D. S. Johnson, and R. E. Tarjan. Performance bounds for level oriented two-dimensional packing algorithms. *SIAM Journal on Computing*, 9:808–826, 1980.

[8] J. Csirik and A. van Vliet. An on-line algorithm for multidimensional bin packing. *Operations Research Letters*, 13:149–158, 1993.

[9] P. Gilmore and R. Gomory. A linear programming approach to the cutting stock problem. *Ops. Res.*, 9:849–859, 1961.

[10] P. Gilmore and R. Gomory. Multistage cutting stock problems of two and more dimensions. *Ops. Res.*, 13:94–120, 1965.

[11] Y. Kohayakawa, F.K. Miyazawa, P. Raghavan, and Y. Wakabayashi. Multidimensional cube packing. *Algorithmica*, 40(3):173–187, 2004.

[12] K. Li and K-H. Cheng. A generalized harmonic algorithm for on-line multidimensional bin packing. TR UH-CS-90-2, University of Houston, January 1990.

[13] F. K. Miyazawa and Y. Wakabayashi. Packing problems with orthogonal rotations. In *Proc. of Latin American Theoretical INformatics.*, volume 2976 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 359–368, Buenos Aires, Argentina, 2004. Springer-Verlag.

[14] F.K. Miyazawa and Y. Wakabayashi. Approximation algorithms for the orthogonal z-oriented 3-D packing problem. *SIAM Journal on Computing*, 29(3):1008–1029, 2000.

[15] Jürgen Rietz and Guntram Scheithauer. Tighter bounds for the gap and non-IRUP constructions in the one-dimensional cutting stock problem. *Optimization*, 51.6:927–963, 2002.

[16] G. Scheithauer and J. Terno. Theoretical investigations on the modified integer round-up property for the one-dimensional cutting stock problem. *Oper. Res. Lett.*, 20:93–100, 1997.

[17] Guntram Scheithauer and Johannes Terno. The modified integer round-up property of the one-dimensional cutting stock problem. *European J. Operational Research*, 84:562–571, 1995.

Campinas, abril de 2007.

Pedro Henrique Del Bianco Hokama

Flávio Keidi Miyazawa